第 17 講　定積分

PART1　定積分の計算

要点整理と公式

要点 ①　定積分

ある区間で連続な関数 $f(x)$ について，$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とする。このとき，区間内の 2 数 a，b に対して

$F(b)-F(a)$

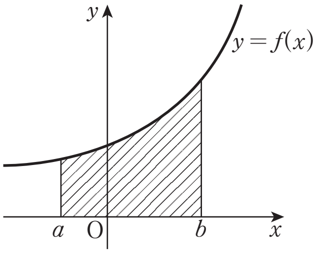
を，$f(x)$ の a から b までの「　　　　」といい，　　　　　と表す。a をこの定積分の「　　　」，b を「　　　」という。a と b の大小関係は $a<b$，$a=b$，$a>b$ のいずれでもよい。

定積分

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を求めることを，$f(x)$ を a から b まで「　　　　　」という。不定積分の結果が積分変数を変数とする関数であるのに対して，定積分の結果は定数であり，その結果は積分変数によらない。例えば，$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$ である。

区間 $[a,\ b]$ でつねに $f(x)\geqq 0$ のとき定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は，$y=f(x)$ のグラフと 2 直線 $x=a$，$x=b$ および x 軸で囲まれた図形の面積に等しい。



定積分においては，$F(b)-F(a)$ の計算の際に積分定数 C が消えるため，積分定数を省いて計算を行う。

(ex) $\int_2^3 \sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_2^3=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

$\int_0^\pi 2\sin 2\theta d\theta=[-\cos 2\theta]_0^\pi=-\{1-(1)\}=0$

要点 ② 定積分の性質

定積分について，次のことが成り立つ。

定積分の性質

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k \text{ は定数})$$

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(ex) $\displaystyle\int_1^e \frac{x^2-2x+3}{x}dx = \int_1^e\left(x-2+\frac{3}{x}\right)dx = \int_1^e xdx - 2\int_1^e dx + 3\int_1^e \frac{dx}{x}$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e - 2[x]_1^e + 3[\log x]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}(e^2-1^2) - 2(e-1) + 3(1-0) = \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{9}{2}$$

要点 ③ 絶対値のついた関数の定積分

絶対値がついた関数の定積分は，絶対値記号の中の式の正負の境目となる x の値で積分区間を分けて計算する。

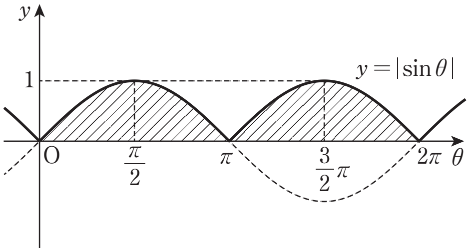
(ex) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin\theta|d\theta$ を求める。

$0 \leqq \theta \leqq$ 　のとき $|\sin\theta| = \sin\theta$

$\leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき $|\sin\theta| = -\sin\theta$

よって

$$\int_0^{2\pi}|\sin\theta|d\theta = \int_0 \sin\theta d\theta + \int^{2\pi}(-\sin\theta)d\theta$$



$$= [-\cos\theta]_0^{\pi} + [\cos\theta]_{\pi}^{2\pi} = \{1-(-1)\} + \{1-(-1)\} = 4$$

1 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)^3\,dx$　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_1^3 e^{2t-1}\,dt-\int_1^0 e^{2t-1}\,dt$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x \sin 3x\,dx$　(6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} |\cos x|\,dx$

Point Pickup

定積分の計算

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

不定積分 $F(x)$ を求め，$F(b)-F(a)$ を計算する。

第17講 PART1 確認問題

次の定積分を求めよ。

ただし，選択肢のあるものはその中から選べ。

1 $\displaystyle\int_1^2 (3x-5)^4\,dx = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$

2 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3x+2} = \log\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$

3 $\displaystyle\int_1^2 e^{-t}\,dt - \int_1^0 e^{-t}\,dt = \boxed{カ}$

① $\dfrac{1}{e^2}$　② $-\dfrac{1}{e^2}$

③ $1-\dfrac{1}{e^2}$　④ $\dfrac{1}{e^2}-1$

4 $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \boxed{キ}$

① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{\pi}{2}$

③ π　④ $\dfrac{3}{2}\pi$

5 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2x \cos x\,dx = \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$

6 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin x|dx=$ コ

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　② $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

③ $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　④ $2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

[MEMO]

第17講 定積分

PART1 定積分の計算

1 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)^3\,dx$　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x}dx$　(3) $\displaystyle\int_1^3 e^{2t-1}dt-\int_1^0 e^{2t-1}dt$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\sin 3x\,dx$　(6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} |\cos x|\,dx$

[解答]

(1) $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)^3\,dx=\left[\frac{1}{8}(2x-1)^4\right]_0^3=\frac{1}{8}(625-1)=78$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x}dx=\int_1^2\frac{1}{x(x+2)}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}[\log x-\log(x+2)]_1^2$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left[\log\frac{x}{x+2}\right]_1^2=\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{2}-\log\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\int_1^3 e^{2t-1}dt-\int_1^0 e^{2t-1}dt=\int_1^3 e^{2t-1}dt+\int_0^1 e^{2t-1}dt=\int_0^3 e^{2t-1}dt$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{2}e^{2t-1}\right]_0^3=\frac{1}{2}\left(e^5-\frac{1}{e}\right)$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos x\sin 3x\,dx=\int_0^{\pi}\sin 3x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin 4x+\sin 2x)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\}=0$

(6) $\displaystyle\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $|\cos x|=\cos x$　$\displaystyle\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{4}{3}\pi$ のとき $|\cos x|=-\cos x$

よって $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi}|\cos x|\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4}{3}\pi}(-\cos x)dx$

$\displaystyle=[\sin x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}-[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4}{3}\pi}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)=2$

第 17 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイ：11，ウ：5

[解説]

$$\int_1^2 (3x-5)^4\,dx=\left[\frac{1}{15}(3x-5)^5\right]_1^2 \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{1}{15}\{1^5-(-2)^5\}$$

$$=\frac{33}{15}=\mathbf{\frac{11}{5}}$$

[A]　定積分

$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると，

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b$$
$$=F(b)-F(a)$$

2

[正解] エ：4，オ：3

[解説]

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3x+2}=\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx \quad \text{[B]}$$

$$=[\log(x+1)-\log(x+2)]_0^1 \quad \text{[C]}$$

$$=\left[\log\frac{x+1}{x+2}\right]_0^1$$

$$=\log\frac{2}{3}-\log\frac{1}{2}$$

$$=\mathbf{\log\frac{4}{3}}$$

[B]　部分分数に分解する。

[C]　$\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\log|x|+C$

3 [正解] カ：③

[解説]

$$\int_1^2 e^{-t}dt-\int_1^0 e^{-t}dt=\int_1^2 e^{-t}dt+\int_0^1 e^{-t}dt$$

[D]

$$=\int_0^2 e^{-t}dt \quad \text{[D]}$$

$$=\left[-e^{-t}\right]_0^2$$

$$=-e^{-2}-(-1)$$

$$=\mathbf{1-\frac{1}{e^2}}$$

[D] $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$

$=\int_a^c f(x)dx$

4 [正解] キ：②

[解説]

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x dx=\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}dx \quad \text{[E]}$$

$$=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

[E] $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

$\Longleftrightarrow \quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

5 [正解] ク：4，ケ：3

[解説]

$$\int_0^{\pi}\sin 2x\cos x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin 3x+\sin x)dx \quad \text{[F]}$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x-\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)\right\}$$

$$=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

[F] 積→和の公式

$\sin\alpha\cos\beta$

$=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

6　**[正解] コ：④**

[解説]

$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき，$|\sin x| = \sin x$

$\pi \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ のとき，$|\sin x| = -\sin x$ [G]

[G]　場合分けをして，絶対値記号をはずす。

よって，

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{4}\pi} |\sin x| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (-\sin x) dx$$

$$= \left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[\cos x\right]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

$$= 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$